ブラックホールと揺らぎの定理

総研大 素粒子原子核専攻　岡澤 晋 [1]

ブラックホールとスカラー場の系を考えると、スカラー場の有効的な運動方程式としてLangevin方程式が導かれる。そこから揺らぎの定理を作ると、ブラックホール熱力学における「一般化された第二法則」が導出される。

1　ブラックホール熱力学

ブラックホールが熱力学法則に似た関係式を満たすことは古典重力のみの段階で議論されており、

$$\begin{cases} \frac{\kappa}{8\pi G}\Delta A_{\rm BH} = \Delta M & ,\kappa = \frac{1}{4GM} \\ \Delta A_{\rm BH} \geq 0 \end{cases} \tag{1}$$

という関係が知られていた。ここで $\Delta A_{\rm BH}$ は、あるエネルギー流入 ΔM に対するホライズン面積の増分である。2つ目の式は、物質のエネルギーが正（重力は常に引力）であることを仮定して導かれるもので、面積定理と呼ばれる。これらは熱力学第一法則と第二法則に似ている。

ブラックホールからは光すら抜け出せないとされるが、ブラックホール時空上で場の量子論を考えると遠方にいる観測者はブラックホールからの輻射を見ることが知られている。輻射は、質量 M のSchwarzschildブラックホールの場合、温度 $T_H = \frac{1}{8\pi GM}$ のPlanck分布となる。これをHawking輻射と呼ぶ。

1つ目の式を $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ でまとめると残る部分がエントロピーと見なせ、$S_{\rm BH} = \frac{A_{\rm BH}}{4G}$ と同定される。2つ目の式はHawking輻射によって破られるため、物質場のエントロピーも含めた全エントロピーが増大すると修正されて、「一般化された第二法則」と呼ばれる。

$$\begin{cases} T_H \Delta S_{\rm BH} = \Delta M & \text{(1st law)} \\ \Delta S_{\rm BH} + \Delta S_{\rm matter} \geq 0 & \text{(Generalized 2nd law)} \end{cases} \tag{2}$$

2　物質場の運動方程式

定性的に考えて、ブラックホール周りの物質場はブラックホールに吸収されることによる摩擦とHawking輻射によるノイズを受ける。Schwarzschild時空上の自由スカラー場 ϕ の場合、ホライズン $(r = r_H)$ での境界条件として $(\partial_t - \partial_{r_*})\phi|_{r=r_H} = 0$ を考えるが、この条件は時間反転対称性を破っており、摩擦と解釈することが出来る。(r_* は動径座標)

[1] E-mail: okazawas@post.kek.jp

我々は、$r = r_H \sim r_H + \epsilon$ の場を積分することでHawking輻射を取り入れた有効作用を求め、結果として

$$(\partial_t - \partial_{r_*})\phi_{l,m}|_{r=r_H+\epsilon} = \xi \ , \ \langle \xi(t) \rangle = 0 \ , \ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle \simeq 2\frac{T_H}{r_H^2}\delta(t-t') \tag{3}$$

というLangevin方程式が導かれることを示した。期待値としては $\langle(\partial_t - \partial_{r_*})\phi\rangle|_{r=r_H+\epsilon} = 0$ だが、Hawking輻射によりブラックホールからエネルギーが流出してくると解釈出来る。
ホライズンより外の位置では、通常の運動方程式 $\left(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 + V_l(r)\right)\phi_{l,m} = 0$ が満たされる。ここで、$\phi_{l,m}$ は球面調和関数で展開した場の値、$V_l(r)$ はスカラー場に対する重力ポテンシャルである。

3 ブラックホールと物質場に対する揺らぎの定理

一般的に外部パラメータ λ_t^F に依存したポテンシャル $V_l(r;\lambda_t^F)$ を考える。場の運動方程式をFokker-Planck方程式に読み替え、外部パラメータ変化 λ_t^F の下 $t=0\sim\tau$ で場 $\phi(t,r,\Omega)$ がある経路 Γ_τ をとる確率 $P^F[\Gamma_\tau|\phi_i]$ と、外部パラメータ変化 $\lambda_t^R \equiv \lambda_{\tau-t}^F$ の下で時間反転経路 Γ_τ^* が得られる確率 $P^R[\Gamma_\tau^*|\phi_f]$ の比を求めると

$$\frac{P^F[\Gamma_\tau|\phi_i]P^{eq}(\phi_i)}{P^R[\Gamma_\tau^*|\phi_f]P^{eq}(\phi_f)} = \exp\left[\frac{1}{T_H}\int^{\Gamma_\tau} dt A_{\mathrm{BH}} T_t^r + \frac{1}{T_H}(\Delta H_{\mathrm{matter}} - \Delta F_{\mathrm{matter}})\right] \tag{4}$$

となる。ここで、初期分布は平衡分布とした。ブラックホール熱力学の第一法則 $T_H \Delta S_{\mathrm{BH}} = \Delta M$ より $\int^{\Gamma_\tau} dt A_{\mathrm{BH}} T_t^r \equiv \Delta M$ はブラックホールエントロピーの変化分に読み替えられる。従って、外部パラメータ変化 λ_t^F に伴い全エントロピー変化 $\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}}$ を得る確率 $\rho^F(\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}})$ と、λ_t^R の下 $-(\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}})$ を得る確率 $\rho^R(-(\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}}))$ の比は

$$\frac{\rho^F(\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}})}{\rho^R(-(\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}}))} = e^{\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}}} \tag{5}$$

となる。ここから、積分形としてJarzynski型の等式

$$\langle e^{-(\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}})} \rangle = 1 \tag{6}$$

が得られ、$\langle e^x \rangle \geq e^{\langle x \rangle}$ を用いると

$$\langle(\Delta S_{\mathrm{BH}} + \Delta S_{\mathrm{matter}})\rangle \geq 0 \tag{7}$$

というブラックホール熱力学における一般化された第二法則が導かれる。
通常の揺らぎの定理と同じように、式(5), (6)は負のエントロピー生成の存在を意味する。今後この示唆をさらに追及し、ブラックホールの情報喪失問題等、より大きな問題に対する非平衡物理を踏まえたアプローチを考えたい。

参考文献

[1] Satoshi Iso, Susumu Okazawa, Sen Zhang, arXiv:1008.1184 [gr-qc]